OPCIÓN A

A.1.-a) Estudiar para que valores de ***a*** el determinante de la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 2a \\ 0 & a-1 & 0 \\ -a & 0 & a \end{pmatrix}$, es no nulo.

Para ***a = 3*** obtener el determinante de la matriz ***2A*** (1'5 puntos)

b) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.Calcula el rango de **(AB)^{T}**(1 punto)

$a)$

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 2a \\ 0 & a-1 & 0 \\ -a & 0 & a \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a & 0 & 2a \\ 0 & a-1 & 0 \\ -a & 0 & a \end{vmatrix} = a\cdot(a-1)\cdot a - 2a\cdot(a-1)\cdot(-a) = \left(a^2+2a^2\right)\cdot(a-1) \Rightarrow$$

$$Si\ |A| = 0 \Rightarrow 3a^2\cdot(a-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a-1=0 \Rightarrow a=1 \end{cases}$$

$$\forall a \in \Re - \{0\ ,1\} \Rightarrow |A| \neq 0$$

$$2A=\begin{pmatrix} 2a & 0 & 4a \\ 0 & 2a-2 & 0 \\ -2a & 0 & 2a \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2a & 0 & 4a \\ 0 & 2a-2 & 0 \\ 0 & 0 & 6a \end{pmatrix} \Rightarrow |2A| = \begin{vmatrix} 2a & 0 & 4a \\ 0 & 2a-2 & 0 \\ 0 & 0 & 6a \end{vmatrix} = 2a\cdot(2a-2)\cdot 6a$$

$$|2A| = 24a^2\cdot(a-1) \Rightarrow Si\ a=3 \Rightarrow |2A| = 24\cdot 3^2\cdot(3-1) = 48\cdot 9 = 432$$

$b)$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1+(-1)\cdot 0 & 1.2+(-1)\cdot 3 & 1.(-1)+(-1)\cdot(-1) \\ 2.1+0\cdot 0 & 2.2+0\cdot 3 & 2.(-1)+0\cdot(-1) \\ 0.1+3\cdot 0 & 0.2+3\cdot 3 & 0.(-1)+3\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 9 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 9 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 9 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\left[(AB)^T\right] = 2$$

A.2.- Sea $f(x)=\begin{cases} x^2+2x & -\infty < x \le 0 \\ sen\,(ax) & 0 < x < \pi \\ (x-\pi)^2+1 & \pi \le x < +\infty \end{cases}$

a) Calcular los valores de ***a*** para los cuales ***f(x)*** es una función continua. (1 punto)
b) Estudiar la derivabilidad de ***f(x)*** para cada uno de estos valores. (1 punto)

c) Obtener $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$.(0'5 puntos)

a)

$$\begin{cases} f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0^2+2\cdot 0=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=sen\,(2\cdot 0)=sen\,0=0 \end{cases} \Rightarrow f(0)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=0 \Rightarrow En\ x=0\ la\ \ función\ es\ continua$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to \pi^-} f(x)=sen\,(a\cdot\pi) \\ f(\pi)=\lim\limits_{x\to \pi^+} f(x)=(\pi-\pi)^2+1=1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to \pi^-} f(x)=sen\,(a\cdot\pi)=f(\pi)=\lim_{x\to \pi^+} f(x)=1 \Rightarrow$$

$$sen\,(a\cdot\pi)=1 \Rightarrow a\cdot\pi=arc\ sen\,(1) \Rightarrow a\cdot\pi=\frac{\pi}{2} \Rightarrow a=\frac{1}{2} \Rightarrow En\ x=\pi\ la\ \ función\ es\ continua\ si\ a=\frac{1}{2}$$

b)

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+2 & -\infty < x \le 0 \\ \frac{1}{2}\cdot cos\left(\frac{x}{2}\right) & 0 < x < \pi \Rightarrow \\ 2(x-\pi) & \pi \le x < +\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=2.0+2=2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\frac{1}{2}\cdot cos\left(\frac{0}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot cos\,0=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow f'(0)=\lim_{x\to 0^-} f'(x)=2 \ne \lim_{x\to 0^+} f'(x)=\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$En\ x=0\ la\ \ función\ no\ es\ derivable$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to \pi^-} f'(x)=\frac{1}{2}\cdot cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot 0=0 \\ f'(\pi)=\lim\limits_{x\to \pi^+} f'(x)=2\cdot(\pi-\pi)=0 \end{cases} \Rightarrow f'(\pi)=\lim_{x\to \pi^+} f'(x)=\lim_{x\to \pi^-} f'(x)=0 \Rightarrow$$

$En\ x=\pi\ la\ \ función\ es\ derivable$

c)

$$\int_{-1}^{0}\left(x^2+2x\right)dx=\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_{-1}^{0}+2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{3}\cdot\left[0^3-(-1)^3\right]+\left[0^2-(-1)^2\right]=\frac{1}{3}\cdot(0+1)+(0-1)=\frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3}$$

A.3.- Encontrar el polinomio de grado dos ***p(x) = ax²* + *bx* + *c*** sabiendo que satisface: en ***x = 0*** el polinomio vale ***2***, su primera derivada vale ***4*** para ***x = 1*** y su segunda derivada vale ***2*** en ***x = 0***. Estudiar si el polinomio obtenido es una función par, ¿Tiene en ***x = 0*** un punto de inflexión. (2'5 puntos)

$$\begin{cases} p'(x) = 2ax + b \\ p''(x) = 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 2 \Rightarrow c = 2 \\ p'(1) = 2a \cdot 1 + b = 4 \Rightarrow 2a + b = 4 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow 2 + b = 4 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow \\ p''(0) = 2a = 2 \end{cases}$$

$$p(x) = x^2 + 2x + 2 \Rightarrow$$

$$p(-x) = (-x)^2 + 2 \cdot (-x) + 2 = x^2 - 2x + 2 \neq p(x) \Rightarrow No\ es\ simétrica \Rightarrow No\ es\ par$$

$$p''(x) = 2 \Rightarrow p''(0) = 2 \neq 0 \Rightarrow No\ hay\ punto\ de\ inf\ lexión\ en\ x = 0$$

A.4.- Dada las rectas**:** $r \equiv \begin{cases} x + 2y = 7 \\ y + 2z = 4 \end{cases}$, $s \equiv x - 1 = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{2}$

a) Justificar si son o no perpendiculares. (1 punto)

b) Calcular la distancia del punto ***P(16 , 0 , 0)*** a la recta ***r***. (1'5 puntos)

a) Para ser perpendiculares deben de cumplir dos condiciones primera que el producto escalar de sus vectores directores sea nulo y por ultimo que tengan un punto común, porque de no tenerlo se cruzarían

$$r \equiv y = 4 - 2z \Rightarrow x + 2(4 - 2z) = 7 \Rightarrow x + 8 - 4z = 7 \Rightarrow x = -1 + 4z \Rightarrow$$

$$\begin{cases} r \equiv \begin{cases} x = -1 + 4\lambda \\ y = 4 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (4\ , -2\ , 1) \\ s \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 3\mu \\ z = -1 + 2\mu \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_s} = (1\ , 3\ , 2) \end{cases} \Rightarrow Si\ r\ es\ perpendicular\ con\ s \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \perp \overrightarrow{v_s} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s} = 0 \Rightarrow$$

$$(4\ , -2\ , 1) \cdot (1\ , 3\ , 2) = 4 \cdot 1 + (-2) \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 4 - 6 + 2 = 0 \Rightarrow Son\ perpendiculares\ los\ vectores\ directores$$

$$Punto\ comun$$

$$\begin{cases} -1 + 4\lambda = 1 + \mu \\ 4 - 2\lambda = 3\mu \\ \lambda = -1 + 2\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\lambda - \mu = 2 \\ 2\lambda + 3\mu = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\lambda - \mu = 2 \\ -4\lambda - 6\mu = -8 \end{cases} \Rightarrow -7\mu = -6 \Rightarrow \mu = \frac{6}{7} \Rightarrow 2\lambda + 3 \cdot \frac{6}{7} = 4 \Rightarrow$$

$$2\lambda = 4 - \frac{18}{7} \Rightarrow 2\lambda = \frac{10}{7} \Rightarrow \lambda = \frac{5}{7} \Rightarrow 2\mu - \lambda = 1 \Rightarrow 2 \cdot \frac{6}{7} - \frac{5}{7} = \frac{7}{7} = 1 \Rightarrow Se\ cor\,tan\ en\ un\ punto \Rightarrow$$

$$Las\ rectas\ r\ y\ s\ son\ perpendiculares$$

Continuación de problema A.4.-

b) Hallaremos un plano π que pasando por el punto **P** sea perpendicular a la recta **r,** de la que tomaremos su vector director como director del plano, el producto escalar de este vector con el formado por **P** y el punto generador **G** es nulo ya que son perpendiculares.

El punto de intersección de la recta **r** con el plano hallado nos da el punto **Q,** hallando su distancia con **P** tendremos la pedida en el problema

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (4\ ,-2\ ,1) \\ \overrightarrow{PG} = (x\ ,y\ ,z) - (16\ ,0\ ,0) = (x-16\ ,y\ ,z) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \perp \overrightarrow{PG} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{PG} = 0 \Rightarrow$$

$$(4\ ,-2\ ,1)\cdot(x-16\ ,y\ ,z) = 0 \Rightarrow 4\cdot(x-16) + (-2)\cdot y + 1\cdot z = 0 \Rightarrow \pi \equiv 4x - 2y + z - 64 = 0$$

$$Punto\ Q\ de\ int\,er\,sec\,ción$$

$$4\cdot(-1+4\lambda) - 2(4-2\lambda) + \lambda - 64 = 0 \Rightarrow -4 + 16\lambda - 8 + 4\lambda + \lambda - 64 = 0 \Rightarrow 21\lambda - 76 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{76}{21}$$

$$Q\begin{cases} x = -1 + 4\cdot\left(\dfrac{76}{21}\right) = \dfrac{283}{21} \\ y = 4 - 2\cdot\left(\dfrac{76}{21}\right) = -\dfrac{68}{21} \\ z = \dfrac{76}{21} \end{cases} \Rightarrow d_{Pr} = d_{PQ} = \sqrt{\left(16 - \frac{283}{21}\right)^2 + \left(0 + \frac{68}{21}\right)^2 + \left(0 + \frac{76}{21}\right)^2}$$

$$d_{Pr} = \sqrt{\left(\frac{53}{21}\right)^2 + \left(\frac{68}{21}\right)^2 + \left(\frac{76}{21}\right)^2} = \frac{\sqrt{53^2 + 68^2 + 76^2}}{21} = \frac{\sqrt{13209}}{21}\ u$$

OPCIÓN B

B1.- a) Estudiar para que valores de ***x,*** la matriz inversa de $\begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix}$ coincide con su opuesta (1'5 puntos)

b) Dos hermanos de tercero y cuarto de primaria iban camino del colegio con sus mochilas cargadas de libros todo del mismo peso. Uno de ellos se lamentaba del peso que transportaba y el otro le dijo: *"¿De que te quejas?.Si yo te cogiera un libro, mi carga sería el doble que la tuya. En cambio si te diera un libro, tu carga igualaría a la mía"*.
¿Cuantos libros llevaba cada hermano? (1'5 puntos)

a)

$$Siendo\ A = \begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$Existe\ A^{-1} si\ |A| \neq 0 \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{vmatrix} = -x^2 + 10 \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow -x^2 + 10 = 0 \Rightarrow x^2 = 10 \Rightarrow x = \sqrt{10} \Rightarrow$$

$$Existe\ A^{-1} \Rightarrow x \in \Re - \{-\sqrt{10}\ , \sqrt{10}\} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (adj\ A^t) \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} x & 5 \\ -2 & -x \end{pmatrix} \Rightarrow adj\ A^t = \begin{pmatrix} -x & 2 \\ -5 & x \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} A^{-1} = \dfrac{1}{-x^2+10} \cdot \begin{pmatrix} -x & 2 \\ -5 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{x}{10-x^2} & \dfrac{2}{10-x^2} \\ -\dfrac{5}{10-x^2} & \dfrac{x}{10-x^2} \end{pmatrix} \\ -A = \begin{pmatrix} -x & 2 \\ -5 & x \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\dfrac{x}{10-x^2} & \dfrac{2}{10-x^2} \\ -\dfrac{5}{10-x^2} & \dfrac{x}{10-x^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x & 2 \\ -5 & x \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -\dfrac{x}{10-x^2} = -x \Rightarrow -x = -10x + x^3 \Rightarrow x^3 - 9x = 0 \Rightarrow (x^2-9)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases} \end{cases} \\ \dfrac{2}{10-x^2} = 2 \Rightarrow 2 = 20 - 2x^2 \Rightarrow 2x^2 - 18 = 0 \Rightarrow 2(x^2-9) = 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases} \\ -\dfrac{5}{10-x^2} = -5 \Rightarrow -5 = -50 + 5x^2 \Rightarrow 5x^2 - 45 = 0 \Rightarrow 5 \cdot (x^2-9) = 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases} \\ \dfrac{x}{10-x^2} = x \Rightarrow x = 10x - x^3 \Rightarrow -x^3 + 9x = 0 \Rightarrow -x(x^2-9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$$Solución \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$$

Continuación problema B1

b)

El que habla lleva **X** libros, el otro hermano lleva **Y** libros

$$\begin{cases} X+1=2\cdot(Y-1) \\ Y+1=X-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X-2Y=-3 \\ X-Y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X-2Y=-3 \\ -X+Y=-2 \end{cases} \Rightarrow Y=-5 \Rightarrow Y=5\ libros \Rightarrow X=5+2=7\ libros$$

$$Solución\ (7\ ,5)$$

B.2.- Sea $f(x)=\dfrac{2x^2-x}{x^2-x^3}$

a) Calcular el dominio ***f(x)***. (0'5 puntos)
b) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de ***f(x)*** (1 punto)
c) Analizar las asíntotas de ***f(x)*** y calcular las que existan (1 punto)

a)

$$x^2-x^3=0 \Rightarrow x^2(1-x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow f(0)=\dfrac{2\cdot 0^2-0}{0^2-0^3}=\dfrac{0}{0} \Rightarrow ¿Discontinuidad\ evitable? \\ 1-x=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow f(1)=\dfrac{2\cdot 1^2-1}{1^2-1^3}=\dfrac{1}{0} \Rightarrow Discontinuidad\ no\ evitable \end{cases}$$

Estudiemos la discontinuidad evitable

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2-x}{x^2-x^3}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{(2x-1)x}{(x-x^2)x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-1}{x-x^2}=\frac{2.0-1}{0-0^2}=-\frac{1}{0} \Rightarrow Discontinuidad\ no\ evitable$$

$$Dom(f)=\forall x\in\Re-\{0\ ,1\}$$

b)

$$f'(x)=\frac{(4x-1)\cdot(x^2-x^3)-(2x-3x^2)\cdot(2x^2-x)}{(x^2-x^3)^2}=\frac{4x^3-4x^4-x^2+x^3-(4x^3-2x^2-6x^4+3x^3)}{(x^2-x^3)^2}$$

$$f'(x)=\frac{5x^3-4x^4-x^2-4x^3+2x^2+6x^4-3x^3}{(x^2-x^3)^2}=\frac{2x^4-2x^3+x^2}{(x^2-x^3)^2}=\frac{(2x^2-2x+1)x^2}{(x^2-x^3)^2}$$

$$2x^2-2x+1=0 \Rightarrow \Delta=(-2)^2-4\cdot 2\cdot 1=-4<0 \Rightarrow No\ se\ puede\ descomponer$$

$$Crecimiento \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow \frac{(2x^2-2x+1)x^2}{(x^2-x^3)^2}>0 \Rightarrow \begin{cases} 2x^2-2x+1>0 \Rightarrow \forall x\in\Re \\ x^2>0 \Rightarrow \forall x\in\Re \\ (x^2-x^3)^2>0 \Rightarrow \forall x\in\Re \end{cases} \Rightarrow$$

$$Crecimiento \Rightarrow \forall x\in\Re/(x<0)\cup(0<x<1)\cup(x>1)$$

c)

Asíntotas verticales

$$En\ x=0 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2x^2-x}{x^2-x^3} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2x-1}{x-x^2} = \dfrac{-1}{0^-} = \infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2x^2-x}{x^2-x^3} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2x-1}{x-x^2} = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty \end{cases}$$

$$En\ x=1 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2x^2-x}{x^2-x^3} = \dfrac{1}{0^+} = \infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x^2-x}{x^2-x^3} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty \end{cases}$$

Asíntotas horizontales

$$y = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-x}{x^2-x^3} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\frac{x^2}{x^3}-\frac{x}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}-\frac{x^3}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{\infty}-\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-1} = \frac{0-0}{0-1} = \frac{0}{-1} = 0$$

Asíntota horizontal $y=0$ *cuando* $x\to\infty$

$$y = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-x}{x^2-x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{2(-x)^2-(-x)}{(-x)^2-(-x)^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+x}{x^2+x^3} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\frac{x^2}{x^3}+\frac{x}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}+\frac{x^3}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}+1} = \frac{0+0}{0+1} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow \text{Asíntota horizontal } y=0 \text{ cuando } x\to-\infty$$

Asíntotas 0blícuas

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2-x}{x^2-x^3}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-x}{x^3-x^4} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\frac{x^2}{x^4}-\frac{x}{x^4}}{\frac{x^3}{x^4}-\frac{x^4}{x^4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x}-1} = \frac{\frac{2}{\infty}-\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-1} = \frac{0-0}{0-1} = 0$$

No existe asíntota oblícua cuando $x\to\infty$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2x^2-x}{x^2-x^3}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+x}{-x^3-x^4} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\frac{x^2}{x^4}+\frac{x}{x^4}}{-\frac{x^3}{x^4}-\frac{x^4}{x^4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{-\frac{1}{x}-1} = \frac{\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty}}{-\frac{1}{\infty}-1} = 0$$

No existe asíntota oblícua cuando $x\to-\infty$

B.3.-a) Hallar el área encerrada entre la curva ***y = x³ –3 x*** y la recta ***y = x*** (1'25 puntos)

b) Calcular $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2\ln n}{\ln\left(7n^2\right)}\right)^{\ln n}$ (1'25 puntos)

a)

Puntos de corte entre funciones

$$x^3-3x=x\Rightarrow x^3-4x=0\Rightarrow\left(x^2-4\right)x=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ x^2-4=0\Rightarrow x^2=4\Rightarrow\begin{cases}x=-2\\ x=2\end{cases}\Rightarrow\end{cases}$$

$$\text{Llamando}\begin{cases}f(x)=x^3-3x\\ g(x)=x\end{cases}\Rightarrow$$

$$\text{Puntos de corte con OX}\Rightarrow\begin{cases}f(x)\Rightarrow 0=x^3-3x\Rightarrow 0=\left(x^2-3\right)x\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ x^2-3=0\Rightarrow\begin{cases}x=-\sqrt{3}\\ x=\sqrt{3}\end{cases}\end{cases}\\ g(x)\Rightarrow 0=x\Rightarrow x=0\end{cases}$$

$$\text{Intervalos de curvas}\begin{cases}-2<x<-\sqrt{3}\Rightarrow\begin{cases}f\left(-\frac{9}{5}\right)=\left(-\frac{9}{5}\right)^3-3\cdot\left(-\frac{9}{5}\right)=-\frac{54}{125}\Rightarrow \text{Negativo}\\ g\left(-\frac{9}{5}\right)=-\frac{9}{5}\Rightarrow\text{Negativo}\end{cases}\Rightarrow g(x)<f(x)\\ -\sqrt{3}<x<0\Rightarrow\begin{cases}f(-1)=(-1)^3-3(-1)=2\Rightarrow\text{Positivo}\\ g(-1)=-1\Rightarrow\text{Negativo}\end{cases}\\ 0<x<\sqrt{3}\Rightarrow\begin{cases}f(1)=1^3-3\cdot 1=-2\Rightarrow\text{Negativo}\\ g(1)=1\Rightarrow\text{Positivo}\end{cases}\\ \sqrt{3}<x<2\Rightarrow\begin{cases}f\left(\frac{9}{5}\right)=\left(\frac{9}{5}\right)^3-3\cdot\left(\frac{9}{5}\right)=\frac{729}{125}-\frac{27}{5}=\frac{54}{125}\Rightarrow\text{Positivo}\\ g\left(\frac{9}{5}\right)=\frac{9}{5}\Rightarrow\text{Positivo}\end{cases}\Rightarrow g(x)>f(x)\end{cases}$$

$$A=\left|\int_{-2}^{-\sqrt{3}}x\,dx\right|-\left|\int_{-2}^{-\sqrt{3}}\left(x^3-3x\right)dx\right|+\int_{-\sqrt{3}}^{0}\left(x^3-3x\right)dx+\left|\int_{-\sqrt{3}}^{0}x\,dx\right|+\int_{0}^{\sqrt{3}}x\,dx+\left|\int_{0}^{\sqrt{3}}\left(x^3-3x\right)dx\right|+\int_{\sqrt{3}}^{2}x\,dx-\int_{\sqrt{3}}^{2}\left(x^3-3x\right)dx$$

$$A=\int_{-2}^{-\sqrt{3}}-x\,dx+\int_{-2}^{-\sqrt{3}}\left(x^3-3x\right)dx+\int_{-\sqrt{3}}^{0}\left(x^3-3x\right)dx-\int_{-\sqrt{3}}^{0}x\,dx+\int_{0}^{\sqrt{3}}x\,dx-\int_{0}^{\sqrt{3}}\left(x^3-3x\right)dx+\int_{\sqrt{3}}^{2}\left(4x-x^3\right)dx$$

$$A=\int_{-2}^{-\sqrt{3}}\left(x^3-4x\right)dx+\int_{-\sqrt{3}}^{0}\left(x^3-4x\right)dx+\int_{0}^{\sqrt{3}}\left(4x-x^3\right)dx+\int_{\sqrt{3}}^{2}\left(4x-x^3\right)dx=\int_{-2}^{0}\left(x^3-4x\right)dx+\int_{0}^{2}\left(4x-x^3\right)dx$$

$$A=\int_{-2}^{0}\left(x^3-4x\right)dx+\int_{0}^{2}\left(4x-x^3\right)dx=\frac{1}{4}\cdot\left[x^4\right]_{-2}^{0}-4\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_{-2}^{0}+4\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_{0}^{2}-\frac{1}{4}\cdot\left[x^4\right]_{0}^{2}$$

$$A=\frac{1}{4}\cdot\left[0^4-(-2)^4\right]-2\cdot\left[0^2-(-2)^2\right]+2\cdot\left[2^2-0^2\right]-\frac{1}{4}\cdot\left[2^4-0^4\right]=-\frac{16}{4}+8+8-\frac{16}{4}=8\ u^2$$

Continuación de B.3

b)

Sabiendo que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\ln n}{\ln\left(7n^2\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\ln n}{\ln 7+\ln n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\ln n}{\ln 7+2\ln n}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\frac{\ln n}{\ln n}}{\frac{\ln 7}{\ln n}+2\frac{\ln n}{\ln n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\frac{\ln 7}{\ln n}+2}=\frac{2}{\frac{\ln 7}{\infty}+2}\Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\ln n}{\ln\left(7n^2\right)}=\frac{2}{0+2}=1\Rightarrow$$

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2\ln n}{\ln\left(7n^2\right)}\right)^{\ln n}=1^{\infty}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2\ln n}{\ln 7+2\ln n}\right)^{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln 7+2\ln n-\ln 7}{\ln 7+2\ln n}\right)^{\ln n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln 7+2\ln n}{\ln 7+2\ln n}+\frac{-\ln 7}{\ln 7+2\ln n}\right)^{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-\ln 7}{\ln 7+2\ln n}\right)^{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{\ln 7+2\ln n}{-\ln 7}}\right)^{\ln n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{\ln 7+2\ln n}{-\ln 7}}\right)^{\frac{\ln 7+2\ln n}{-\ln 7}}\right]^{\ln n\cdot\frac{-\ln 7}{\ln 7+2\ln n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-\ln 7\cdot\ln n}{\ln 7+2\ln n}}=e^{-\frac{\ln 7}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e^{\ln 7}}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-\ln 7\cdot\ln n}{\ln 7+2\ln n}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{-\ln 7\cdot\ln n}{\ln n}}{\frac{\ln 7}{\ln n}+\frac{2\ln n}{\ln n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\ln 7}{\frac{\ln 7}{\ln n}+2}=\frac{-\ln 7}{\frac{\ln 7}{\infty}+2}=\frac{-\ln 7}{0+2}=-\frac{\ln 7}{2}$$

B.4.- a) Calcular la ecuación del plano que pasa por los puntos ***(1 , 1 , 1) , (3 , -2 , 2),*** y es perpendicular al plano $\pi \equiv 2x - y - z = 0$ (1'75 puntos)

b) Estudiar si los vectores $\vec{a} = (1, -1, -1), \vec{b} = (0, 1, 1), \vec{c} = (0, 0, 1)$ son linealmente independientes (0'75 puntos)

a) El vector director del plano dado es vector del plano β buscado, así como el vector que forman los puntos por los que tiene que pasar y el vector formado por uno de estos y el punto genérico del plano buscado.

$a)$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (2, -1, -1) \\ \overrightarrow{PQ} = (3, -2, 2) - (1, 1, 1) = (2, -3, 1) \\ \overrightarrow{PG} = (x, y, z) - (1, 1, 1) = (x-1, y-1, z-1) \end{cases} \Rightarrow \beta \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-(x-1) - 2\cdot(y-1) - 6\cdot(z-1) + 2\cdot(z-1) - 3\cdot(x-1) - 2\cdot(y-1) = 0 \Rightarrow$$

$$-4\cdot(x-1) - 4\cdot(y-1) - 4\cdot(z-1) = 0 \Rightarrow (x-1) + (y-1) + (z-1) = 0 \Rightarrow \beta \equiv x + y + z - 3 = 0$$

$b)$

$$\alpha(1, -1, -1) + \beta(0, 1, 1) + \gamma(0, 0, 1) = (0, 0, 0) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \Rightarrow \beta = 0 \\ -\alpha + \beta + \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Sistema homogéneo compatible determinado $\Rightarrow$ *Solución* $(0, 0, 0)$

Son vectores linealmente independientes, pueden formar una base en V^3